

Plan referatu

1. Związek ekonomii z naukami ścisłymi
2. Ekonofizyka
3. Metody fizyki w inżynierii finansowej
 - Błądzenie przypadkowe
 - Uniwersalność
 - Korelacje
 - **Macierze przypadkowe**
 - ...
4. Metody fizyki w makroekonomii
 - Uniwersalność i rozkład dochodów
 - **Kondensacja i korupcja**
5. Podsumowanie i perspektywy

Związek ekonomii z naukami ścisłymi

Ekonomia jest nauką społeczną.

Rynek → **Spekulacje** → Rachunek Prawdopodobieństwa → Procesy
Stochastyczne → Teoria Portfela (Macierze Przypadkowe) → Ryzyko Finansowe
→ ...

Paul Samuelson, Economics: An introductory analysis, 1948

Wielcy prekursorzy

Spekulacje: Newton, Gauss

I can calculate the motions of heavenly bodies, but not the madness of people.

Isaac Newton

Rachunek prawdopodobieństwa: Pascal, Laplace

Procesy stochastyczne: **Bachelier**, Einstein, Smoluchowski, Wiener

Teoria portfela \leftrightarrow Macierze przypadkowe: Markovitz \leftrightarrow Wigner

Louis Bachelier, Teoria Spekulacji, 1900

$$X_{t+1} = X_t + \xi_t, \quad \langle \xi_t \rangle = 0, \quad \langle \xi_t \xi_s \rangle = \sigma^2 \delta_{ts}$$

- prawo rynku finansowego (ruchy Browna)
- rozkład prawdopodobieństwa cen,
- wycena kontraktów (czasowych),
- martyngały,
- arbitraż,
- efektywność rynku,
- ...

Następcy: $X_{t+1} = X_t e^{\xi_t}$

Przykład arbitrażu: Euro/USD = 1.2, USD/ZL=3.0, EURO/ZL=4.0

90 EURO \longrightarrow 360 ZL \longrightarrow 120 USD \longrightarrow 100 EURO

Ekonofizyka

Matematyka finansowa \implies Fizyka finansowa

- doświadczalna: ogromne ilości danych
- teoria: metody fizyki statystycznej

Workshop on Econophysics, Budapeszt, 06.1997

J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press

R.-N. Mategna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press

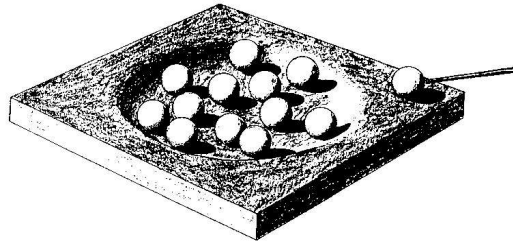
Econophysics ? Phynance ? J.-P. Bouchaud

Metody fizyki w inżynierii finansowej

- **Procesy stochastyczne:** prototyp ruchu Browna, równania Langevina, równania Fokkera-Plancka;
- **Uniwersalność:** niezależność od szczegółów; przykład: centralne twierdzenie graniczne;
- **Macierze przypadkowe:** funkcje Greena, diagramatyka Feynmana, rozwinięcie kolorowe;
- ...

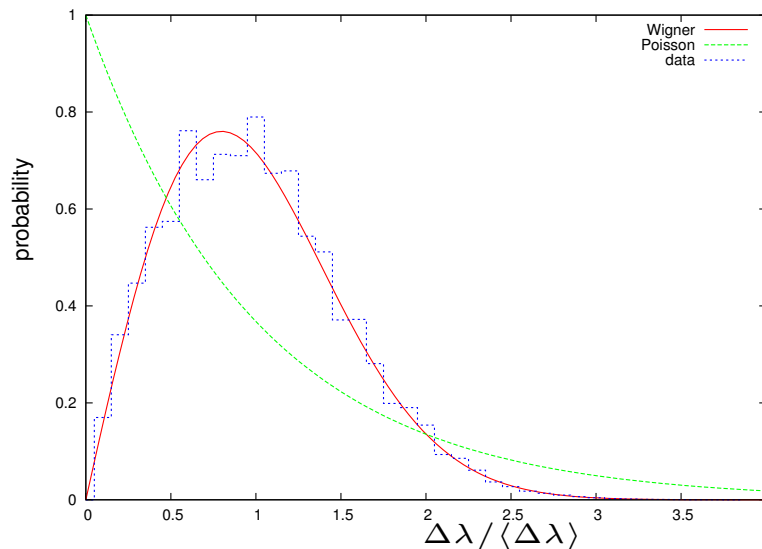
Teoria macierzy przypadkowych

Wigner: nowy typ fizyki statystycznej do opisu kwantowego układu wielu ciał



$$p(H)dH = \exp \left[-\frac{N}{2} \text{tr} H^2 \right] dH \quad \text{gdzie } H = H^\dagger$$

odległość między poziomami: $p_W(x) = \frac{\pi}{2} x \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{4} x^2 \right]$



Zastosowanie modeli macierzowy przypadkowych

- kwantowe układy wielu ciał
- teoria lokalizacji
- szkła spinowe
- chaos kwantowy
- QCD - operator Diraca
- rozwinięcie $1/N$ (diagramatyka planarna)
- kombinatoryka węzłów, pseudoweźłów, meandrów ...
- 2d grawitacja kwantowa, struny niekrytyczne
- hipoteza Riemanna
- **statystyka wielu stopni swobody**
- ...
- sui generis gałąź fizyki matematycznej

Macierze kowariancji

N zmiennych przypadkowych: $X_i, i = 1, \dots, N$

Macierz kowariancji: $C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$

Dla prostoty: $\langle X_i \rangle = 0 \longrightarrow C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle$

Doświadczalna macierz kowariancji: T pomiarów $X_i: x_{it}, t = 1, \dots, T$

$$\begin{array}{|c|} \hline x_{it} \\ \hline \end{array} \quad N$$

T

$$r = N/T, \quad (r < 1)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it} x_{jt}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\tau$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{T} \mathbf{xx}^\tau$$

Rozkład wartości własnych macierzy przypadkowych

Przykład: nieskorolowane identyczne zmienne

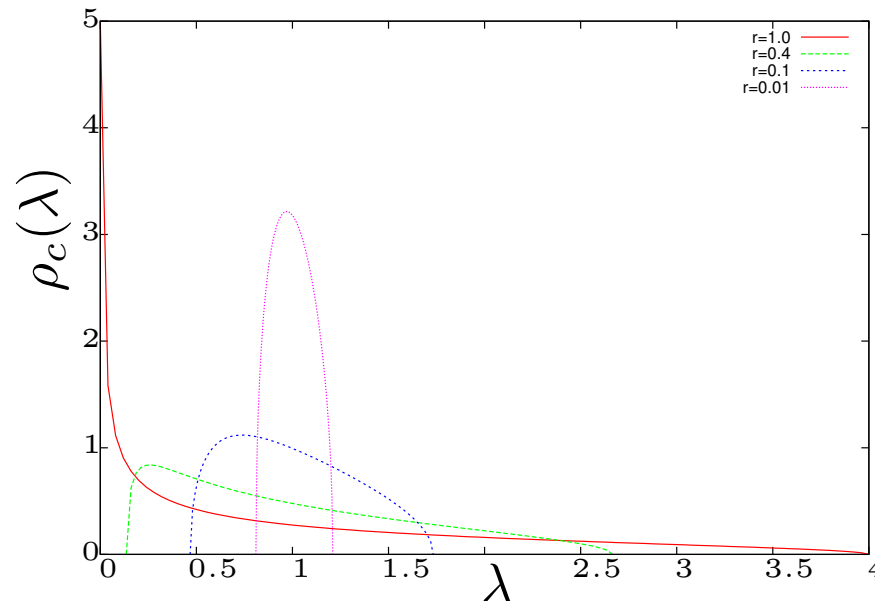
$$C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle = \delta_{ij} \implies \rho_C(\lambda) = \delta(\lambda - 1)$$

Pytanie: $\rho_c(\lambda)$?

$$c_{ij} \sim \delta_{ij} + \epsilon_{ij} \quad \text{gdzie} \quad \epsilon_{ij} \sim O(1/\sqrt{T})$$

Granice: $N \rightarrow \infty$ and $r = N/T = \text{const}$

$$\text{Wishart: } \rho_c(\lambda) = \frac{1}{2\pi r \lambda} \sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)} \quad \text{gdzie} \quad \lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{r})^2$$



Sygnal i szum w macierzy korelacji**Problem wprost:** $\rho_C(\lambda) \implies \rho_c(\lambda)$ **Problem odwrotny** $\rho_c(\lambda) \implies \rho_C(\lambda)$ **Rzeczywisty problem** $\lambda_1, \dots, \lambda_N \implies \rho_C(\lambda)$ Wynik zależy od $r = \frac{N}{T}$: np. $r \rightarrow 0 \implies \rho_c(\lambda) \rightarrow \rho_C(\lambda)$

- matematyka
- fizyka
- biologia
- telekomunikacja
- teoria informacji
- **matematyka finansowa (problem portfela)**
- ...

Wybór portfela

Zysk, ryzyko, dywersyfikacja (H. Markovitz)

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1, X = \sum_{i=1}^N p_i X_i$$

$$\text{Zysk: } \langle X \rangle = \sum_{i=1}^N p_i \langle X_i \rangle$$

$$\text{Ryzyko: } \sigma^2(X) = \sum_{ij} p_i C_{ij} p_j = \sum_i \lambda_i v_i^2$$

Zasada wyboru portfela: zminimalizować ryzyko przy oczekiwanym zysku

Jak wyliczyć C_{ij} ?

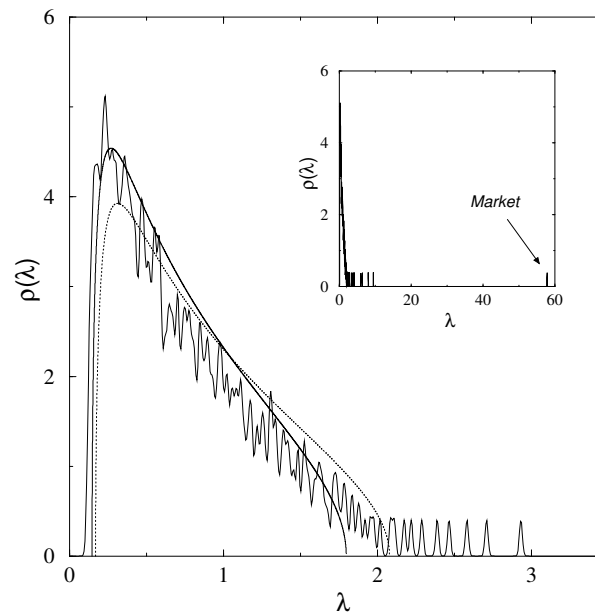
$$\text{Dane historyczne: } R_{it} = \ln \frac{P_{it}}{P_{it-1}} \implies x_{it} = R_{it} - \langle R_i \rangle$$

$$c_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it} x_{jt}$$

$$\rho_c(\lambda) \rightarrow \rho_C(\lambda)$$

Obserwacje empiryczne

$$c_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it} x_{jt} \quad \text{gdzie} \quad x_{it} = \frac{R_{it} - \langle R_i \rangle}{\sigma_i}$$



PRL 83(7), 1467 (1999) by Bouchaud, Cizeau, Laloux, Potters

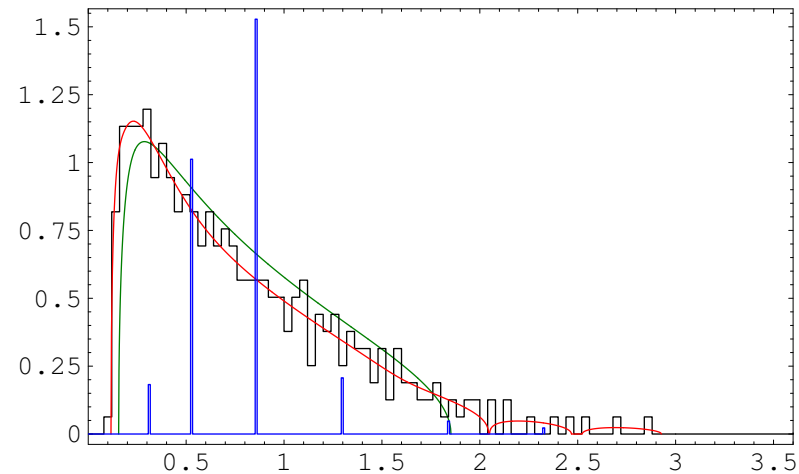
C vs. **c**, pojedyncze piki = sektory

Uniwersalność \implies Potrzebne precyzyjniejsze metody analizy!

Związek między C and c Burda, Görlich, Jarosz, Jurkiewicz, Physica **A343**
(2004) 295.

$$g(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - c} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle$$

$$\frac{1}{x \pm i0^+} = PV \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \implies \rho(x) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} g(x+i0^+)$$



Momenty spektralne

$$m_k = \int \rho_c(\lambda) \lambda^k d\lambda \quad , \quad M_k = \int \rho_c(\lambda) \lambda^k d\lambda$$

$$m_1 = M_1$$

$$m_2 = M_2 + rM_1^2$$

$$m_3 = M_3 + 3rM_1M_2 + r^2M_1^3$$

...

$$M_1 = m_1$$

$$M_2 = m_2 - rm_1^2$$

$$M_3 = m_3 - 3rm_1m_2 + 2r^2m_1^3$$

... .

Odszumiane macierzy kowariancji

Wykorzystanie niestatystycznej informacji w wyznaczaniu C

Makroekonomia - rozkład dochodów (bogactwa)**V. Pareto**, *Cours d'économie politique*, 1897

$$dx p(x) = \frac{A dx}{x^{1+\alpha}} \quad x \gg x_0$$

$$\text{Prusy 1852} \quad \alpha = 1.89$$

$$\text{Prusy 1894} \quad \alpha = 1.60$$

$$\text{Saksonia 1880} \quad \alpha = 1.58$$

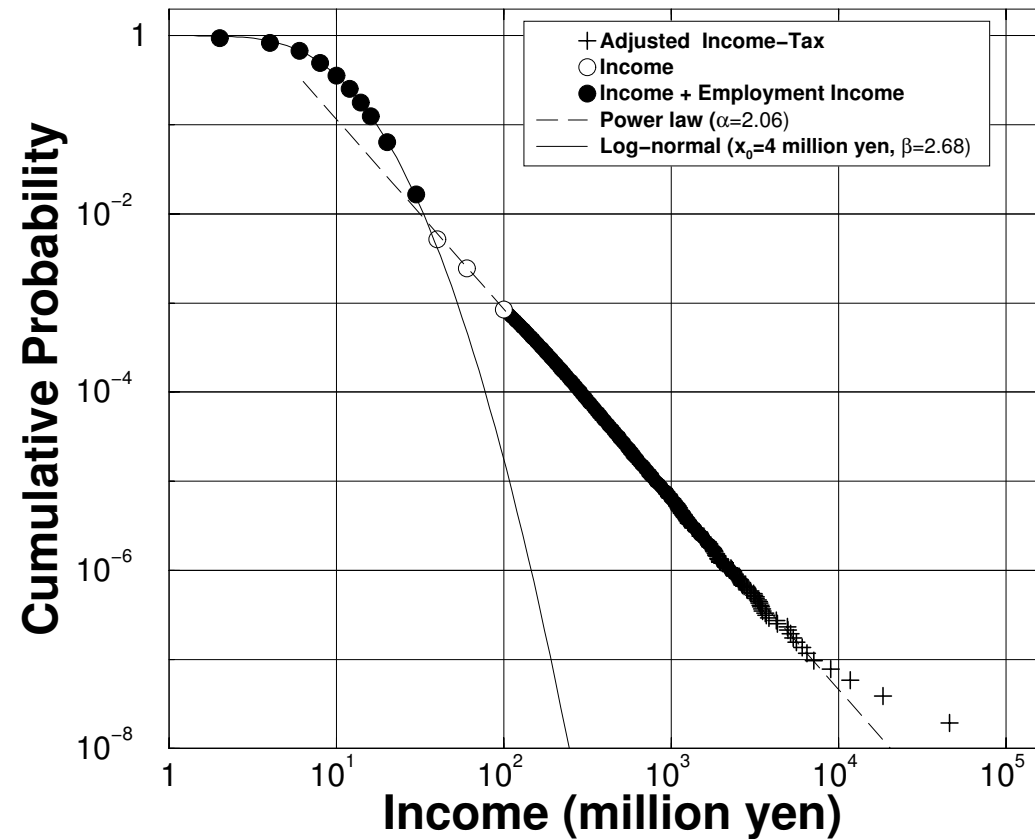
$$\text{Florencja 1880} \quad \alpha = 1.41$$

$$\text{Bazylea 1880} \quad \alpha = 1.24$$

R. Gibrat, *Les Inégalités Economiques*, 1931

$$dx p(x) = \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{\ln^2(x/x_0)}{2\sigma^2}$$

Rozkład bogactwa w Japoni '98

Wataru Souma, *Physics of Personal Income*, cond-mat/0202388

Argument średniopolowy

Addytywne zmiany przypadkowe: $y_{t+1} = y_t + \xi_t$

$$\langle \xi_t \rangle = m, \quad \langle \xi_t \xi_s \rangle_c = \sigma^2 \delta_{ts}$$

$$dy P_A(y, T) = \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(y - y_0 - mT \right)^2 \right]$$

Multiplikatywne zmiany przypadkowe: $x_{t+1} = x_t e^{\xi_t}, \quad y_t = \ln x_t$

$$dx P_M(x, T) = \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\ln \frac{x}{x_0 e^{mT}} \right)^2 \right]$$

Warunki brzegowe: $y > y_*$

Addytywne zmiany przypadkowe: $y_{t+1} = y_t + \xi_t$

$m = \langle \xi_t \rangle < 0 \implies$ rozkład eksponencjalny

$$P_A(y) dy = \alpha e^{-\alpha(y-y_*)} dy$$

Multiplikatywne zmiany przypadkowe: $x_{t+1} = x_t e^{\xi_t}$, $y_t = \ln x_t$

$$P_M(x) dx = \alpha \frac{x_*^\alpha}{x^{1+\alpha}} dx$$

Prawo Pareto dla $m < 0$

Prawo Gibrata dla $m > 0$

Model kulek w pudełkach (poprawiony argument średniopółowy)P. Bialas, Z. Burda, D. Johnston, Nucl. Phys. **B493** (1997) 505

$$p(x)dx \sim x^{-1-\alpha}dx \quad , \quad X = x_1 + \dots + x_N = \mathbf{const}$$

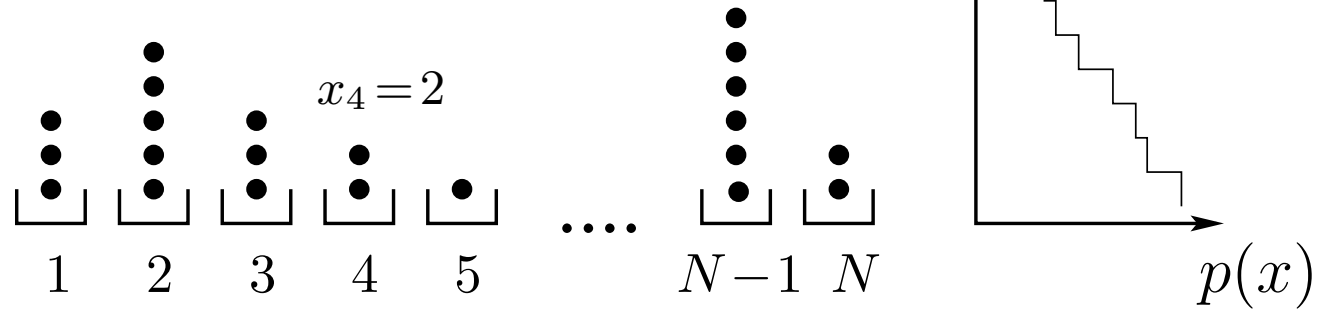
Liczby naturalne $x_i > 0$ Granica : $N \rightarrow \infty$, $\rho = X/N = \mathbf{const}$

$$Z(X, N) = \sum_{\{x_i > 0\}} \prod_i p(x_i) \delta \left(X - \sum_{i=1}^N x_i \right)$$

Efektywny rozkład prawdopodobieństwa :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i^N \delta(x_i - x) \right\rangle_Z$$

$$X = \sum_{i=1}^N x_i = \sum \bullet$$



Przejście fazowe at $\rho_{cr} = \sum_x x p(x)$.

W punkcie przejścia fazowego: $\rho = \rho_{cr}$:

$$\hat{p}(x) \sim p(x) .$$

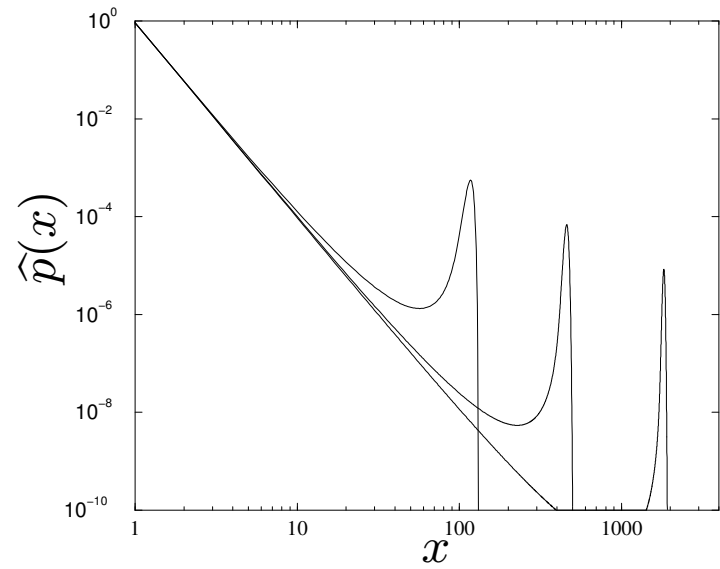
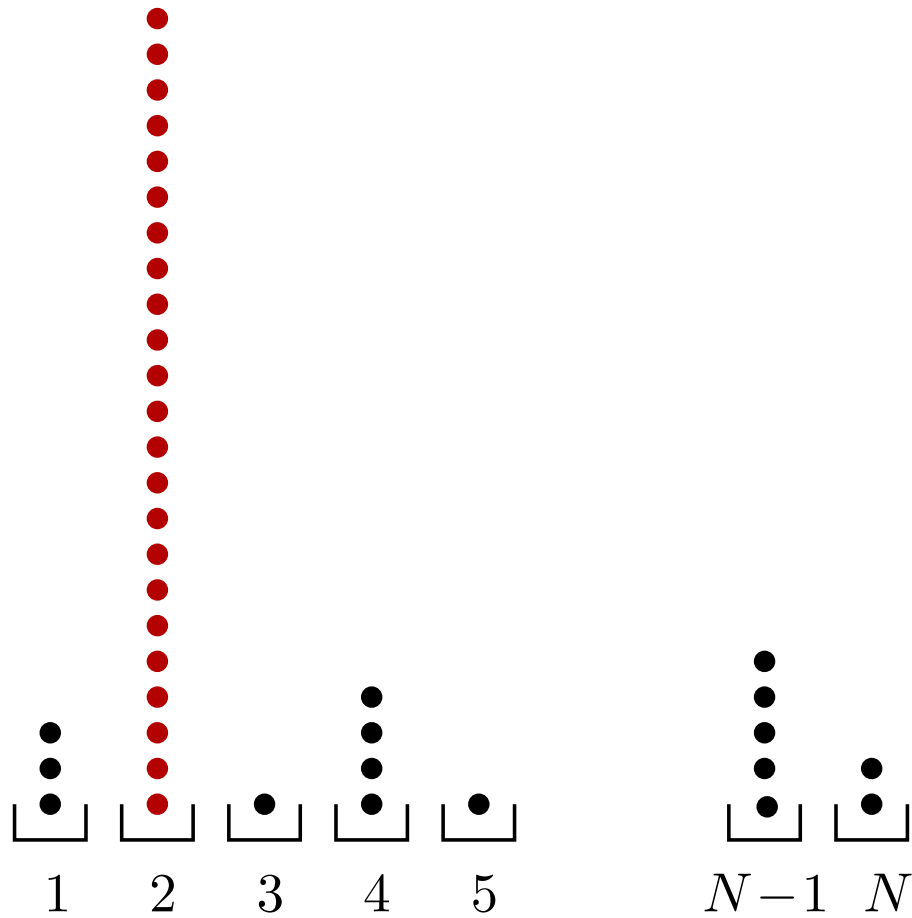
Faza deficytowa : $\rho < \rho_{cr}$:

$$\hat{p}(x) \sim e^{-\sigma x} p(x) .$$

Faza nadmiarowa : $\rho > \rho_{cr}$:

$$\hat{p}(x) \sim p_{cr}(x) + \frac{1}{N} \delta(x, X - N\rho_{cr}) .$$

Kondensacja



Paradoks

Czym bardziej restryktywny system tym mniejsze ρ_{cr} .

Im mniejsze ρ_{cr} tym łatwiej wygenerować kondensacje (przejście do fazy nadmiarowej) **(Korupcja)**

W liberalnej makroekonomii typu Pareto nie ma korupcji

$$p(x) \sim x^{-1-\alpha} \quad \text{for } 0 < \alpha < 1 \implies \rho_{cr} = \sum_x xp(x) = \infty$$

Nature :

[http:// www.nature.com/nsu/020121/020121-14.html](http://www.nature.com/nsu/020121/020121-14.html)

Wealth spawns corruption

Podsumowanie

- Teoria portfela (odszumianie macierzy kowariancji)
- Makroekonomia (rozkład dochodów)

Perspektywy

- Instrumenty pochodne
- Arbitraż statystyczny
- Szukanie korelacji w danych
- Transakcje w internecie
- ...